

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Serviciul Național de Evaluare și Examinare

A 45-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa județeană și a Municipiului București

6 martie 2004

CLASA A-X-A

Subiectul 1

Fie n un număr natural, $n \geq 3$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente, conținute în mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ care formează o progresie aritmetică.

Subiectul 2

Să se determine numerele naturale n , $n \geq 3$, cu proprietatea: *există numerele naturale* distincte a_1, a_2, \dots, a_n , astfel încât

$$a_1! a_2! \cdots a_{n-1}! = a_n!$$

Subiectul 3

În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AB, CD, AC , respectiv BD . Se știe că MN este perpendiculara comună a dreptelor AB și CD iar PQ este perpendiculara comună a dreptelor AC și BD .

Să se arate că $AB = CD$, $BC = DA$ și $AC = BD$.

Subiectul 4

Fie $x, y \in (0, \pi/2)$. Să se arate că dacă egalitatea

$$(\cos x + i \sin y)^n = \cos nx + i \sin ny$$

este adevărată pentru două numere naturale nenule consecutive, atunci este adevărată pentru toate numerele naturale n .

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.